Soluzioni dell'esonero di Analisi Matematica II (primi cinque crediti) dell'11–11–06

Problema 1. In tutti e quattro i casi si trattava delle due superfici $z = x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$ opportunamente traslate.

Compito A. $z - 1 = (x+1)^2 + y^2, \qquad z - 1 = 1 - (x+1)^2 - y^2$

Compito B. $z + 1 = (x-1)^2 + y^2, \qquad z + 1 = 1 - (x-1)^2 - y^2$

Compito C. $z - 1 = x^2 + (y+1)^2, \qquad z - 1 = 1 - x^2 - (y+1)^2$

Compito D. $z - 1 = x^2 + (y-1)^2, \qquad z - 1 = 1 - x^2 - (y-1)^2$

La proiezione sul piano (x, y) dell'intersezione delle due superfici è data dalla circonferenza $2x^2 + 2y^2 = 1$ (nei quattro casi si ha $2(x \pm 1)^2 + 2(y \pm 1)^2 = 1$)

Il volume è dato da $\displaystyle\int\int_{2x^2+2y^2\le 1} dxdy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2-y^2} dz = \int\int_{2x^2+2y^2\le 1} dxdy(1 - 2x^2 - 2y^2)$ e passando a coordinate polari nel piano $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos t$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin t$, si ottiene $\displaystyle\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)dt = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Problema 2. L'area è data dalla formula
$\displaystyle\int\int_{2x^2+2y^2\le 1} dxdy\sqrt{1+4x^2+4y^2} = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} dt\frac{1}{2}\rho\sqrt{1+2\rho^2} = \pi(1+2\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 \frac{1}{6} = \frac{\pi}{6}(3^{3/2} - 1)$
La formulazione del problema parlava di $z = f(x, y)$ e $z < g(x, y)$. Dal momento che x e y appartengono alla proiezione sul piano (x, y) della intersezione delle due curve, le condizioni su z sono soddisfatte.

Problema 3. Calcoliamo direttamente il flusso attraverso la superficie data.

Traslando opportunamente la x oppure la y e la z, si deve integrare sulla superficie $z = x^2+y^2$ il campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x}) = -2y\underline{i}+2x\underline{j}+zxy\underline{k}$ con la condizione $2x^2+2y^2 \le 1$. La normale che punta verso l'esterno della superficie è data da $(2x, 2y, -1)$ e l'integrale è pari a $\displaystyle\int\int_{2x^2+y^2\le 1}(-4xy + 4xy - xy(x^2 + y^2)$ e l'integrale è zero in quanto, passando a coordinate polari nel piano, xy diventa $\sin t \cos t$ che va integrato fra 0 e 2π.

Si poteva usare il Teorema di Gauss ed il risultato era chiaramente lo stesso. Si doveva osservare che la curva intersezione delle due superfici giaceva su di piano $z = z_0$ con z_0 dipendente dal singolo problema. Nel caso specifico in cui si stanno faceno i conti si ha $z = \frac{1}{2}$. Detta V la regione $x^2 + y^2 \le z \le \frac{1}{2}$, il teorema di Gauss ci dà $\displaystyle\int\int\int_V (div\underline{V})dxdydz = \int\int_{z=x^2+y^2;z\le 1/2} d\sigma(\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e) + \int\int_{x^2+y^2\le 1/2;z=1/2} d\sigma(\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e)$ (ogni normale è esterna alla supeficie da cui scaturisce).
$\displaystyle\int\int\int_V (div\underline{V})dxdydz = \int\int_{x^2+y^2\le 1/2} dxdy\int_{x^2+y^2}^{1/2} dzxy = \int\int_{x^2+y^2\le 1/2} dxdy\, xy(\frac{1}{2} - x^2 - y^2) = 0$ in quanto bisogna integrare xy su di un cerchio e ciò fà zero.
Tenendo conto che la normale al piano $z = \dfrac{1}{2}$ è $(0, 0, 1)$, si ha $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1/2;z=1/2} d\sigma(\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e) =$

$\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1/2;z=1/2} dxdy\, zxy = \int\int_{x^2+y^2\le 1/2;z=1/2} dxdy\,\frac{1}{2}xy = 0$ per le stesse ragioni.

Problema 4. Si consigliava di usare il Teorema di Stokes ma non era certamente obbligatorio. Volendo seguire il consiglio si può scrivere $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int\int_{x^2+y^2\le 1/2} d\sigma(\underline{rotF},\underline{n}_e)$ dove $\underline{F}$ è il rotore del campo vettoriale $(0,\frac{1}{3}x^3-2xy^2,-xy)$. Per poter procedere con i calcoli relativi alle superfici già usate ($z=x^2+y^2$ e $z=1-x^2-y^2$) si deve supporre che lo studente abbia riconosciuto che le forme differenziali dei vari esercizi erano date dalla traslazione opportuna di quella data. Per questa ragione procediamo nella risoluzione del presente esercizio in tutti e quattro i casi. La normale al piano è $(0,0,1)$ in tutti e quattro i casi.

A. Il rotore è dato dal vettore $(-1-x,y,(x+1)^2-2y^2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\displaystyle\int\int_{(x+1)^2+y^2\le 1/2} dx\,dy\,((x+1)^2-2y^2) = -\frac{\pi}{16}$

B. Il rotore è dato dal vettore $(1-x,y,(x-1)^2-2y^2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\displaystyle\int\int_{(x-1)^2+y^2\le 1/2} dx\,dy\,((x-1)^2-2y^2) = -\frac{\pi}{16}$

C. Il rotore è dato dal vettore $(-x,1+y,x^2-2y^2-4y-2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\displaystyle\int\int_{x^2+(y+1)^2\le 1/2} dx\,dy\,(x^2-2(y+1)^2) = -\frac{\pi}{16}$

D. Il rotore è dato dal vettore $(-x,1-y,x^2-2y^2+4y-2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\displaystyle\int\int_{x^2+(y-1)^2\le 1/2} dx\,dy\,(x^2-2(y-1)^2) = -\frac{\pi}{16}$

Va detto che la scelta di "chiudere" la curva con un piano è una scelta arbitraria (ancorché legittima e conveniente). Si sarebbe potuto chiudere con la supeficie (ad esempio il caso A) $z=-x^2-y^2-2x+1$ e $(x+1)^2+y^2\le 1/2$. L'integrale da calcolare sarebbe stato $\displaystyle\int\int_{z=-x^2-y^2-2x+1;(x+1)^2+y^2\le 1/2} d\sigma(\underline{rotV},n_e)$. Usiamo sempre coordinate cartesiane per parametrizzare la superficie su cui integrare ottenendo $(x,y,-x^2-y^2-2x+1)$. Il vettore ortogonale esterno è $(2x+2,2y,1)$ per cui si ha $\displaystyle\int\int_{z=-x^2-y^2-2x+1;(x+1)^2+y^2\le 1/2} dx\,dy(-(x+1)^2) = -\frac{\pi}{16}$

Da ultimo evidenziamo il fatto che la superficie con cui "chiudere" avrebbe potuto essere pure con $z=x^2+y^2+2x+2$ ed il risultato è lo stesso.

Problema 5.

A. La massa M del filo non ci interessa volendo l'ascissa pari a zero. Ascissa che è data da $\displaystyle\frac{1}{M}(\int_{-L}^0 \sqrt{2}(-t)t\,dt + \int_0^L \sqrt{2}|t-L|t\,dt) = 0$ da cui $\delta_1 = 2\delta_0$.

B. L'ascissa è data da $\displaystyle\frac{1}{M}(\int_{-L}^0 \sqrt{2}(-t)t\,dt + \int_0^{2L} \sqrt{2}|t-L|t\,dt) = 0$ da cui $\delta_1 = \frac{\delta_0}{3}$.

C. L'ascissa è data da $\displaystyle\frac{1}{M}(\int_{-L}^0 \sqrt{2}(-t)t\,dt + \int_0^{3L} \sqrt{2}|t-L|t\,dt) = 0$ da cui $\delta_1 = \frac{2}{29}\delta_0$.

D. L'ascissa è data da $\frac{1}{M}(\int_{-L}^{0}\sqrt{2}(-t)t\,dt+\int_{0}^{3L}\sqrt{2}|t-2L|t\,dt)=0$ da cui $\delta_1=\frac{\delta_0}{24}$.